FS1111

Cinemática del punto

Mario I. Caicedo

Departamento de Física, Universidad Simón Bolívar

Índice

La cinemática es una parte de la mecánica cuyo objetivo consiste en describir cuantitativamente el movimiento sin hacer referencia a las causas que lo producen. En estas notas estudiaremos algunos elementos de la cinemática del punto material.

Antes de concentrarnos en los detalles del modelo matemático de la cinemática de un punto debemos recordar que la visión newtoniana del espacio es euclídea, tomando esto en cuenta y utilizando un poco la intuición tratemos de poner en claro cuales serán los objetos necesarios para describir el movimiento de un punto.

Con este fin pensemos en el espacio completamente vacio. La partícula (movil) cuyo movimiento deseamos describir debe ser un primer elemento que debemos colocar en el espacio, sin embargo esto no es suficiente. Requerimos al menos otra partícula más que haga las veces de observador. ¿Por qué?, pues porque una de las cosas que evidencia un movimiento es un cambio de posición, y una sola partícula asilada en un espacio que no contiene nada más no es capaz de detectar ningún cambio de posición[1]. Hemos descubierto entonces que, para describir un movimiento requerimos como mínimo de dos partículas, una de las cuales, el **observador** (O), debe poseer conciencia (en el sentido de que debe ser capaz de percibir la partícula (P) observada y el ambiente en que esta se encuentra). Desafortunadamente estos dos únicos objetos aún no constituyen el conjunto mínimo de elementos que son necesarios para construir un modelo para la cinemática. Si bien es cierto que dos puntos definen una única recta en el espacio, la única cantidad de interés en que podríamos pensar con solo dos puntos P y Q, y la recta que ellos definen, es la distancia entre los dos puntos, aunque tambien podemos pensar en

[1]imagínese usted mismo en medio del mar o en l atundra helada sin nada que ver a su alrededor -salvo el horizonte- y medite acerca de las posibilidades que tiene de saber si su posición es fija

el sentido del segmento diciendo que el segmento OP es distinto del PO. Aún así, si los únicos objetos físicos inmersos en el espacio son O y P no hay noción de orientación, se necesitan al menos dos puntos que nuestro observador perciba como fijos Q y R de tal suerte que el triplete de puntos O, Q y R defina un plano. Con estos elementos a la mano si es posible introducirse una noción clara de orientación ya que podemos medir 'angulos del segmento orientado OP con respecto a los segmentos OQ y QR.

La noción de movimiento está inextricablemente asociada a la noción de la posición del movil descrita por el observador, en los términos que hemos estado estudiando la posición del movil puede y debe identificarse con un vector, de hecho, un vector cuyos origen y extremo coinciden con el observador y el móvil respectivamente. Un movimiento se evidencia en un cambio de dicho vector, que denominaremos vector de posición del movil referido al observador. Con el fin de poder hacer una descripción más cuantitativo la partícula conciente tiene que tener una noción de tiempo (un relojito). Con estos elementos en la mano la posición del movil podría describirse en términos de una lista de pares cuyos elementos son: un vector y un instante de tiempo.

Veamos las ideas anteriores en acción con un ejemplo. Imaginemos una niña ($\mathcal{S}$ que gatea en una plaza y a su papá que por ser físico es un individuo a quien le gusta la cinemática. El padre ($\mathcal{M}$) se sienta en un banco y escoje un par de puntos, un árbol ($\mathcal{A}$) y el puesto de helados ($\mathcal{H}$), observando que la distancia entre ellos es constante y que la distancia entre cada uno de ellos y $\mathcal{M}$ tambien es constante. Estamos listo para hacer cinemática. Si el padre nota que la distancia de la niña a los tres puntos cambia, tendrá todo el derecho de decir que: desde su punto de vista, la niña se está moviendo. Como ahora hay tres punticos $\mathcal{M}$ puede definir una noción de orientación de manera muy adecuada y esto le permite definir un vector $\overrightarrow{\mathcal{MS}} \equiv \mathbf{S}$ cuyo origen está fijo en $\mathcal{M}$. De hecho, si lo desea, $\mathcal{M}$ puede deintroducir una base ortonormal en terminos de la $\overrightarrow{\mathcal{MS}}$ se expresará como una única combinación lineal. Ahora bien, si la niña se mueve $\overrightarrow{\mathcal{MS}}$ cambia.

Podemos ver que nuestra línea de razonamiento puede refinarse aún más si se piensa que para cada instante de tiempo (que $\mathcal{M}$ registra en su reloj hay un vector $\mathbf{S}(t)$ y solo uno. En otras palabras, el vector de posición de la niña es una función de variable real (el tiempo) que toma valores vectoriales (ajá, un vector que depende de un parámetro). Tambien debería ser intuitivamente claro que, si los instantes de tiempo (horas) consecutivas son muy seguidas las posiciones de la niña serán cercanas (los vectores de posici'on son cont'ınuos con respecto al tiempo y supondremos que tambi'en son diferenciables). Ya estamos pues armados para hacer cinemática.

1. Desplazamiento y longitud de arco

Definición 1 *El objeto fundamental en la cinemática de un punto material es el vector de posición de la partícula con respecto a algún observador:* $\mathbf{r}(t)$*. La forma explícita del vector de posición con respecto a algún sistema de coordenadas ortonormal asociado a un observador se denomina: "ley de movimiento" 'o "ley horaria" del punto.*

Definición 2 *Dadas las posiciones de un punto material en dos instantes de tiempo* t_1 *y* t_2 *el* <u>*desplazamiento*</u> *del punto en el intervalo de tiempo* $t_1 - t_2$ *es el cambio*

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)\,, \tag{1}$$

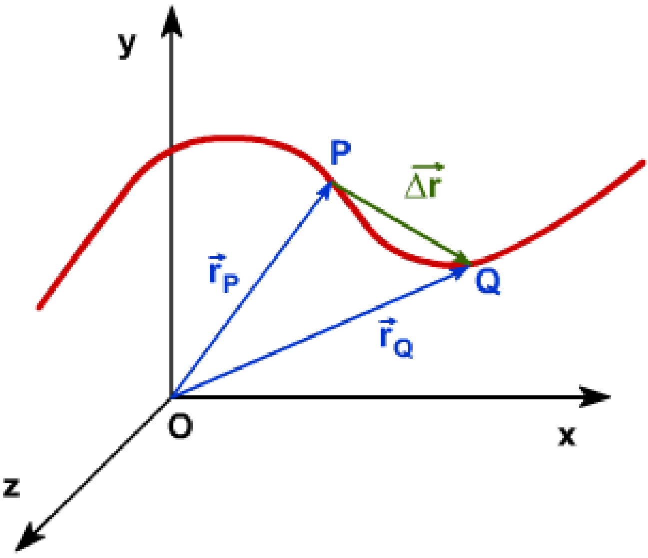

Figura 1: El desplazamiento entre dos instantes de tiempo es la diferencia entre los vectores de posición en dichos instantes, en este caso: $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P$. No es una cantidad escalar

En este punto es importante llamar la atención acerca del uso del lenguaje. Los objetos que hemos estado definiendo y que definiremos más adelante son entidades matemáticas muy particulares, desafortunada (ó afortunadamente) los nombres que se asignana a estas entidades coinciden con sustantivos comunes de uso diario y esto puede causar ciertos problemas. En el habla coloquial no solemos ser demasiado precisos y si bien esto puede causar algunas incomodidades estas no tienen que ser catastróficas. El lenguaje científico es otra cosa, en ciencias tenemos que transmitir ideas de manera concisa y sin ambigüedades lo que obliga a un uso propio del lenguaje.

Ejemplo 1 *El desplazamiento es un concepto suficientemente sencillo como para permitirnos* *ejemplificar las ambigüedades que pueden surgir al usar una palabra de nuestro léxico común en un contexto científico. Imaginemos una atleta entrenando en una pista al aire libre*[2]*, luego de 20 vueltas la atleta habra recorrido* $20 \times 400 = 8000$ *m.*

Luego del entrenamiento, nuestra corredora podría decir a algún compañero de equipo que se desplazó ocho kilómetros y probablemente su compañero entendería que la corredora quiere decir que ha dado 20 *vueltas a la pista.*

Sin embargo, dada la definición que estamos usando y sin importar el número de vueltas que halla dado nuestra amiga, si comenzó y terminó en el mismo punto de la pista su **desplazamiento** *(*$\Delta\mathbf{r}$*) durante esa dura sesión de entrenamiento fue nulo (el vector 0).*

En este caso, el remedio a la ambigüedad que acabamos de describir es sencillo y consiste en hacer un uso propio del lenguaje. La distancia que recorrió la corredora es denominada: *longitud de arco.*

Ejemplo 2 *vamos a estudiar un problema algo más académico. Consideremos una partícula que recorre una pista circular de radio R. Coloquemos el observador en el centro de la pista y supongamos que la partícula recorre medio círculo. El recorrido de la partícula al culminar el movimiento es exactamente la mitad de la longitud del círculo, es decir:*

$$s = \pi R\,. \tag{2}$$

Mientras que su desplazamiento es un vector paralelo al diametro que separa los puntos inicial y final de la trayectoria, que está orientado desde el punto inicial al final y cuya una magnitud

[2]La longitud de una pista es de 400 m

es

$$|\Delta\mathbf{r}| = 2\,R\,. \tag{3}$$

este resultado debería ser totalmente esperado puesto que generaliza de manera muy natural lo que habíamos discutido en el ejemplo anterior. a habíamos hablado de dos ejemplos con trayectorias curvas, la corredora de cuatrocientos metros planos y el coche F1 y de hecho, habíamos definido la rapidez media en términos de la distancia recoorida por el movil, que en la discusión que estamos llevando adelante, es la longitud de medio arco de círculo.

Definición 3 *La longitud de arco es la distancia total recorrida por una partícula en un movimiento determinado.*

En el ejemplo 2 la longitud de arco es obviamente $s = \pi\,R$.

2. Velocidad y rapidez medias

Asociado al concepto de desplazamiento hay otro concepto que se introduce en casi todos los textos de física básica y que presentamos a continuación

Definición 4 *Dado el desplazamiento de una partícula su* <u>*velocidad media*</u> *entre dos instantes de tiempo t_1 y t_2 es el cociente*

$$\langle\mathbf{v}\rangle = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}\,, \tag{4}$$

donde $\Delta\mathbf{r}$ es el desplazamiento de la partícula en el intervalo considerado y $\Delta t = t_2 - t_1$.

A decir verdad, el interés de este concepto: la *velocidad media* a esta altura de sus estudios es bastante limitado (por no decir cuestionable), sin embargo tiene una gran virtud, se aleja tanto de nuestro uso normal del lenguaje que las confusiones que causa su uso pueden resultar útiles para que, quienes se inician en las ciencias y la ingeniería cometan errores catastróficos bien temprano y aprendan a usar propiamente el lenguaje antes de que esos errores se vuelvan demasiado costosos.

Pensemos en nuestra amiga la corredora e imaginémosla entrenando para carreras de 400 m planos. Si nuestra amiga es una atleta de alta competencia sus tiempos en 400 m planos deben rondar los 47 s. Hablando de estos números y en vista de que nuestro idioma es el castellano, nuestra tendencia sería afirmar que la "velocidad" de la atleta es de 8,55 m/s ó 30,6 Km/h. En verdad acá hay dos errores. El primer y más notable error se está cometiendo al asociar la palabra velocidad con un número (la velocidad es un vector). El segundo error es mucho más dificil de notar en este punto, al hablar de valores medios pueden suceder algunas cosas aparentemente paradójicas, en efecto, aun cuando todos estaremos de acuerdo en afirmar que nuestra amiga es una corredora muy rápida ya que en 10 s puede recorrer una distancia de 8,55 m su velocidad media al dar una vuelta a la pista en 47 s es nula.

El primero de los errores que hemos mencionado es típico del estudiante que se inicia en el estudio de la física, en nuestro uso diario denominamos velocidad al cociente ℓ/T en donde ℓ es la distancia (la longitud de arco) que recorre un móvil y T el tiempo en que la recorre, este cociente es un escalar y no un vector. El problema desaparece al hacer utilizar adecuadamente el lenguaje, llamando rapidez al cociente ℓ/T obtenemos dos sustantivos diferentes para nombrar a dos objetos diferentes.

Definición 5 *Sea Δs la longitud de arco que recorre una partícula entre dos instantes de tiempo t_1 y t_2 (que definen un intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$), la rapidez media del móvil en el* *intervalo de tiempo entre estos dos instantes es el cociente*

$$\langle \dot{s} \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}\,, \tag{5}$$

Pensándolo un poco queda claro que esta es la idea que estamos usando cuando en nuestro lenguaje diario hablamos de velocidad[3].

Ejemplo 3 *Revisemos el nuevo concepto hablando de algo que parece gustarnos mucho en Venezuela. Pensemos en el* **LXV Grand Prix de Mónaco**. *Las pistas de F1 son cerradas, y según los reglamentos puede tener entre* 3 *y* 7 *Km de longitud. En el caso de Mónaco, la longitud del circuito es* $\ell = 3{,}34$ *Km (ó* 2,08 *mi) y la carrera consta de* 78 *vueltas (*260,52 *Km).*

En la temporada 2007 *Fernando Alonso, tripulando un coche Mc Laren-Mercedes se llevó varios laureles,*

1. *Pole con un tiempo de*[4] 1 : 15,726*,*
2. *vuelta más rápida* 1 : 15,284 *y*
3. *primer puesto en en el podio.*

Podemos calcular la rapidez media del coche de Alonso en su vuelta de clasificación para el Pole Position, el resultado es (usando la definición)

$$\langle \dot{s} \rangle = \frac{3{,}34\,Km}{\frac{75{,}726\,s}{3600\,s/h}} = 158{,}783\,Km/h\,, \tag{6}$$

[3] de hecho esto es lo que mide el velocímetro de nuestros autos, cuando leemos un valor como 120 Km/h en el veloc'ımetro de nuestro carro decimos que estamos viajando rápido y lo que estamos leyendo no es la velocidad del auto

[4] 1 minuto y 15,726 s

Figura 2: El auto de Fernando Alonso durante una clasificación en el circuito de Mónaco

mientras que en su vuelta de carrera rápida (la vuelta 44 de la carrera) el resultado es $\langle \dot{s} \rangle = 159{,}715\ Km/h$.

Las dos cantidades que acabamos de calcular son <u>*números*</u> *y en consecuencia:* **no son, ni podrían ser alguna vez, velocidades medias**

Ejemplo 4 *Veamos otro ejemplo deportivo. Pensemos en Rafel Vidal*[5] *y en la final de* $200\ m$ *mariposa de los juegos olímpicos de Los Angels en 1984. En aquella competencia, nuestro fantástico nadador detuvo los relojes en* $1:57{,}51$ *(es decir* $117{,}51\ s$*. Como usted debe saber muy bien las competencias de natación olímpicas se llevan a cabo en piscinas de* $50\ m$ *lo que implica que el atleta debe nadar cuatro piscinas completar para los* $200\ m$*. Durante la competencia el nadador debe saltar al agua, y dar vuelta para cambiar el sentido de su movimiento*

[5] 6/01/1965-12/02/2005. Nadador venezolano de alta competencia

de manera que, al igual que en el caso del auto F1, el movimiento es bastante variado. Sin embargo, la rapidez media puede calcularse sin problema. Ya dijimos que Vidal detuvo los cronos en $T = 117{,}51\ s$*, la distancia recorrida en ese tiempo fué de* $400\ m$ *y por lo tanto la rapidez media de Vidal en esa competencia fué:*

$$\langle \dot{s} \rangle = \frac{200}{117{,}51}\ m/s = 6{,}1\, Km/h\,. \tag{7}$$

A estas alturas esto debería ser totalmente evidente, la velocidad media es un vector, la naturaleza enteramente distinta entre números vectores hace totalmente imposible que puedan ser iguales. Más aún, de acuerdo a la definición, la velocidad media del auto en una vuelta es cero indepenientemente del tiempo en que se recorra el circuito, lo que a un periodista de habla castellana experto en F1 le parecería una ridiculez[6].

Ejemplo 5 Movimiento a lo largo de una recta: primera visita

No todo es tan malo, a veces los conceptos si coinciden. Pensemos en una competencia de piques de autos (carreras de $1/4$ *de milla) los tiempos típicos en estas carreras estan entre* 6 *y* $6{,}5$ *segundos. De manera que la rapidez media de un auto de piques está por los* $231{,}7\ Km/h$*, para calcular la velocidad media de un auto en competencia comenzemos colocando un observador en el punto en que comienza la carrera y escojamos una base de vectores de tal forma que la dirección del vector* $\hat{\mathbf{e}}_1$ *coincida con la dirección de la pista y que su orientación sea a lo*

[6] un periodista no es ni ingeniero ni físico y por lo tanto hace uso del lenguaje com'un, nosotros tenemos que usar el lenguaje de manera t'ecnica y por lo tanto lo que debe parecernos ridículo es hablar de velocidades medias que son números. Por cierto, toda esta discusión es innecesaria para las personas de habla inglesa, quienes utilizan *average speed* y *average velocity*

largo del sentido en que se desplazan los autos. En estas condiciones, la posición de un auto en competencia se expresa como

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\hat{\mathbf{e}}_1\,, \tag{8}$$

donde $x(t)$ es un número con unidades de longitud. El signo de $x(t)$ sería negativo si en el instante t el auto estuviera localizado en un punto anterior al de partida, $x(t) = 0$ en el punto de partida y $x(t)$ será un número positivo en cualquier punto de un carril en la zona de carrera. Ya dijimos que los cronos rondan $T = 6{,}25$ s, el desplazamiento de un auto en ese tiempo es

Figura 3: Un auto de carreras de un cuarto de milla

por lo tanto el vector

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(T) - \mathbf{r}(0) = (x(T) - x(0))\;\hat{\mathbf{e}}_1 = (0{,}25\,millas)\;\hat{\mathbf{e}}_1\,. \tag{9}$$

Por otra parte, y en virtud de la definición, la velocidad media correspondiente sería en este caso:

$$\langle\mathbf{v}\rangle = \frac{x(T) - x(0)}{T}\,\hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{0{,}25}{6{,}25}\;millas/s\,\hat{\mathbf{e}}_1 = 231{,}7\,Km/h\;\hat{\mathbf{e}}_1\,. \tag{10}$$

La magnitud de este vector ($|\Delta x|/T$) no es otra cosa que la rapidez media que ya habíamos calculado, de manera que, en este caso $\langle \dot{x} \rangle = |\langle \mathbf{v} \rangle|$

Ejemplo 6 *Volvamos sobre las ideas que discutimos en el ejemplo 2, y supongamos que la partícula recorre el medio círculo en un tiempo T. Es evidente que la rapidez media de la partícula es*

$$\langle \dot{s} \rangle = \pi R/T \,. \tag{11}$$

Mientras que su velocidad media es un vector paralelo al diametro que separa los puntos inicial y final de la trayectoria, que está orientado desde el punto inicial al final y cuya una magnitud es

$$|\langle \mathbf{v} \rangle| = R/T \,, \tag{12}$$

3. Velocidad instantánea

Aún considerando movimientos generales a lo largo de curva, las ambigüedades comienzan a disminuir notablemente si el intervalo temporal (Δt) en que pretendemos calcular la velocidad media se hace muy pequeño, para ver esto cambiemos un poco nuestra notación. Usemos t para el instante inicial del movimiento y $t + \Delta t$ para el instsante final del intervalo temporal. Si Δt es chico, los vectores $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ -cuyos orígenes se encuentran en el punto en que está el observador- tienen sus extremos muy cercanos y por lo tanto la diferencia $\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ es casi paralela a la tangente a la curva en el punto que coincide con la posición del móvil en el instante t y está orientado en elo sentido del movimiento , más aún, la magnitud del vector de desplazamiento en ese intervalo muy corto de tiempo es escencialmente igual a la del arco de curva que el movil describe entre t y $t + \Delta t$ (exactamente lo que ocurría en el caso del auto de piques). Como consecuencia de estos hechos, la magnitud de la velocidad media en el intervalo $(t, t + \Delta t)$ es igual a la rapidez media del móvil en ese intervalo.

Evidentemente la línea de razonamiento que estamos siguiendo nos va a llevar a la situación límite en que $\Delta t \to 0$, y esto lleva a un nuevo concepto,

Definición 6 *Considérense un observador ($\mathcal{O}$) y una partícula cuya posición con respecto a $\mathcal{O}$ está dada por el vector $\mathbf{r}(t)$. En el instante t la velocidad instantánea (ó sencillamente la velocidad) de la partícula según $\mathcal{O}$ es la derivada*

$$\mathbf{v}(t) \equiv \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{r}}(t) \tag{13}$$

Hay una observación verdaderamente importante con respecto a la velocidad, la velocidad no es un vector deslizante, en cada instante de tiempo el orígen de la velocidad se encuentra en la partícula móvil.

Asociada al movimiento general hay otra noción importante, la de trayectoria.

Definición 7 *La trayectoria de un movil es el lugar geométrico constituido por la sucesión de los extremos de su vector de posición.*

Al pensar en esto un momento salta a la vista que la trayectoria es una curva, es de hecho la curva que corresponde al trazo de la pistas de F1 o de atletismo que hemos considerado en nuestros ejemplos. El problema con la trayectoria es que no siempre está "marcada" claramente en el espacio, si imaginamos un planeador entenderemos lo que pasa, los planeadores hacen vuelos muy lindos pero no dejan rastro de los puntos del espacio por los que pasan en un determinado vuelo, de manera, que si quisiéramos visualizar la trayectoria de un planeador deberíamos atarle una fuente de humo para que este marcara el rastro (la trayectoria).

Figura 4: Durante una exhibición aérea cuatro aviones han dejado sendos rastros de humo que el viento aún no ha borrado. Los rastros de humo marcan las trayectorias que han seguido los aviones.

Es interesante notar que muchos movimientos distintos pueden seguir la misma trayectoria. Podemos pensar en distintos trenes siguiendo exactamente la misma ruta (trayectoria), con solo cambiar la lista de estaciones en que se va a parar cada tren o cambiar la duración de cada parada las leyes de movimiento de cada tren serán distintas entre sí.

Observación 1 *Como consecuencia de la definición, la velocidad instantánea en un instante t es un vector tangente a la trayectoria cuya magnitud es la rapidez media de la partícula en un intervalo infinitesimal de tiempo δt alrededor del instante t.*

La ley de movimiento de una partícula en un plano fijo siempre podrá expresarse en la forma

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\hat{\mathbf{e}}_x + y(t)\,\hat{\mathbf{e}}_y\,, \tag{14}$$

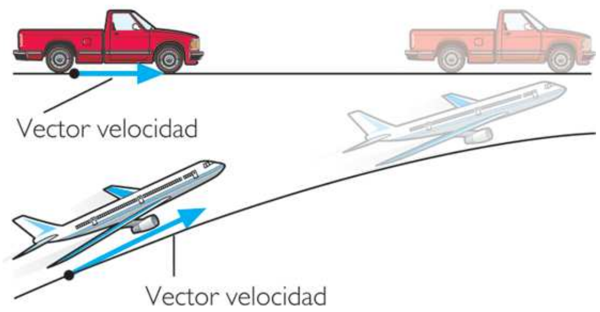

Figura 5: Esta figura pretende mostrar la velocidad ($\mathbf{v}$) como un vector cuyo origen está en la partícula en movimiento, y que en cada instante es tangente a la trayectoria.

donde los vectores de la base $\hat{\mathbf{e}}_x$ y $\hat{\mathbf{e}}_x$ son constantes. A veces es posible expresar una de las coordenadas en función de la otra, digamos $y = y(x)$, otras veces es posible encontrar una relación de la forma $f(x, y) = 0$, en cualquiera de estos casos diremos que hemos encontrado la ecuación de la trayectoria.

Ejemplo 7 *Considere la ley de movimiento* $\mathbf{r}(t) = v_{0x}t\hat{\mathbf{e}}_x + (v_{0y}t + \frac{at^2}{2})\hat{\mathbf{e}}_y$*. Poniendo* $x(t) = v_{0x}t$ *y* $y(t) = v_{0y}t + \frac{at^2}{2}$*, podemos obtener (hágalo usted mismo) la ecuación de la trayectoria que corresponde al movimiento:*

$$y(x) = \frac{av_{0y}}{2v_{0x}^2}x^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x \tag{15}$$

4. Aceleración

Con el fin de completar la descripción de la cinemática del punto es menester introducir otra noción que tambien está asociada con cambios,

Definición 8 *Considérense un observador ($\mathcal{O}$) y una partícula cuya velocidad con respecto a $\mathcal{O}$ está dada por el vector $\mathbf{v}(t)$. En el instante t la aceleración instantánea de la partícula según $\mathcal{O}$ es la derivada*

$$\mathbf{a}(t) \equiv \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \ddot{\mathbf{r}}(t) \tag{16}$$

Al igual que la velocidad, la aceleración no es un vector deslizante, al contrario, su origen está localizado en el móvil. El significado de la aceleración es bastante más dificil de explicar que el de la velocidad y al igual que esta, la palabra aceleración se usa en el lenguaje común de una manera que induce a erores importantes.

El lego utiliza no solo la palabra aceleración sino el vocablo "desaceleración" ó frenado con un significado que tiene una relación remota e incorrecta con el significado preciso del término. En efecto, se asocia la palabra aceleración con un aumento de la rapidez y a la desaceleración comoa una disminución de aquella. Si bien, esta interpretación cruda de la aceleración tiene una relación con el significado real ya que expresa una noción de cambio, la noción de aquellos que usan el lenguaje de forma impropia es demasiado primitiva.

La aceleración se define como la tasa de cambio instantánea de la velocidad, como la velocidad es un vector esta tasa de cambio puede manifestarse como un cambio de dirección de la velocidad que no implique cambio en la rapidez 'o un cambio en la rapidez sin requerir un cambio en la dirección de la velocidad e inclusive un cambio más radical que implique cambios tanto en la magnitud como en la dirección de la velocidad.

Asícomo la velocidad tiene relación con la noción de rapidez, la aceleración tiene relación con la violencia en que se puedan llevar a cabo los cambios en la velocidad. En el caso de la rapidez, la aceleración es un indicativo de que tan fuertes pueden ser los cambios de esta, así por ejemplo, aún cuando dos autos distintos puedan alcanzar una rapidez de 140 Km/h, solo autos de gran potencia pueden alcanzar tales tasas de recorrido por unidad de tiempo en corto tiempo, de hecho, uno de los parámetros que se utilizan a diario para expresar de alguna forma las bondades de un auto es el tiempo en que este pueda alcanzar los 100 Km/h. En cuanto a los cambios de dirección, podemos pensar en aviones, los aparatos más maniobrables son aquellos que pueden cambiar su dirección de vuelo con mayor facilidad, lo que corresponde a la posibilidad de realizar maniobras en que las aceleraciones pueden tener magnitudes notablemente altas (que usualmente se miden en múltiplos de la magnitud $g = 9{,}8\ m/s^2$). Con el fin de entender mejor

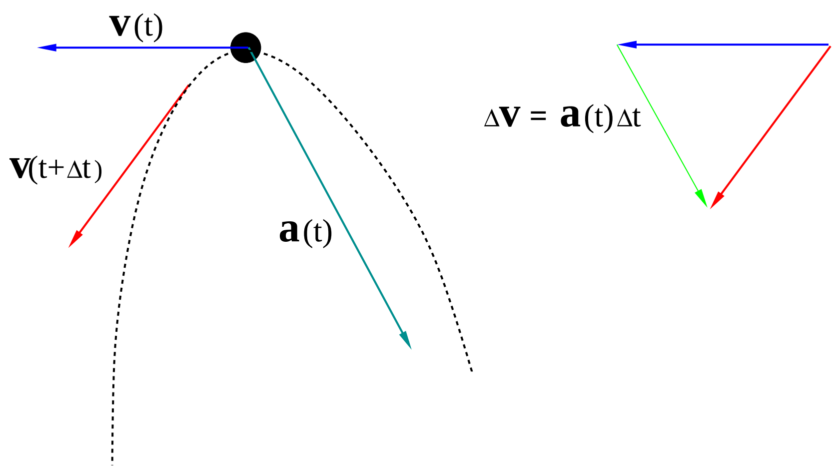

Figura 6: Una partícula en movimiento, el cambio en la velocidad es $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)$. La línea punteada es la trayectoria de la partícula

la definición de aceleración consideremos la figura 6, allí se muestra una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria curva, Δt es un intervalo de tiempo muy chico comparado con t, de acuerdo a esto:

$$\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t) \approx \mathbf{a}(t)\Delta t\,, \tag{17}$$

donde $\mathbf{a}(t)$ es la aceleración en el instante t, de manera que la aceleración instantánea en t es paralela al cambio de velocidad $\Delta\mathbf{v}$, ahora vamos a ver lo más lindo, en cada instante de tiempo siempre podemos expresar la aceleración como:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_{||}(t) + \mathbf{a}_{\perp}(t)\,, \tag{18}$$

donde $\mathbf{a}_{||}(t)$ es un vector paralelo a la velocidad y $\mathbf{a}_{\perp}(t)$ es ortogonal a $\mathbf{v}(t)$, si $\mathbf{a}_{\perp}(t)$ resultara ser nulo en algún instante de tiempo esto ocurriría porque la aceleración y la velocidad son paralelos en ese instante.

Ahora bien, recuerde que dos vectores son paralelos si y solo si su producto vectorial es nulo, dicho esto observe que $\mathbf{v}(t+\Delta t) = \mathbf{v}(t) + [\mathbf{a}_{||}(t) + \mathbf{a}_{\perp}(t)]\Delta t$ de manera que

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t+\Delta t)\times\mathbf{v}(t) &= \Big(\mathbf{v}(t) + [\mathbf{a}_{||}(t) + \mathbf{a}_{\perp}(t)]\Delta t\Big)\times\mathbf{v}(t) \\ &= \mathbf{a}_{\perp}(t)\times\mathbf{v}(t)\,\Delta t\,. \end{aligned} \tag{19}$$

Este último resultado demuestra que si la aceleración no es paralela a la velocidad, la velocidad cambiará necesariamente de dirección.

¿Podremos decir algo con respeco a la rapidez?, para contestar esta pregunta consideremos el cuadrado de la rapidez en el instante $t+\Delta t$, es decir, consideremos el producto

$$|\mathbf{v}(t+\Delta t)|^2 = \mathbf{v}(t+\Delta t).\mathbf{v}(t+\Delta t)\,, \tag{20}$$

usando los resultados que ya tenemos a mano podemos poner

$$|\mathbf{v}(t+\Delta t)|^2 = \Big(\mathbf{v}(t) + [\mathbf{a}_{||}(t) + \mathbf{a}_{\perp}(t)]\Delta t\Big)\,.\,\Big(\mathbf{v}(t) + [\mathbf{a}_{||}(t) + \mathbf{a}_{\perp}(t)]\Delta t\Big) =$$

$$= \mathbf{v}^2(t) + 2\left(\mathbf{a}_{||}(t).\mathbf{v}(t) + \mathbf{a}_\perp(t).\mathbf{v}(t)\right)\,\Delta t + O(\Delta t^2)\,, \tag{21}$$

donde $O(\Delta t^2)$ representa a los términos que contienes factores $(\Delta t)^2$, que por ser Δt una cantidad muy pequeña, son despreciables con respecto a los sumandos que contienen potencias primeras de dicha cantidad, en resumen y recordando que (i) $\mathbf{a}_\perp(t).\mathbf{v}(t) = 0$ y (ii) $\mathbf{a}_{||}(t).\mathbf{v}(t) = \pm|\mathbf{a}_{||}(t)|\, dots(t)$, donde $\dot{s}$ es la rapidez de la partícula, el cuadrado de la rapidez en $t + \Delta t$ es (con precisión $O(\Delta t)^2$ es:

$$|\mathbf{v}(t+\Delta t)|^2 = \mathbf{v}^2(t) \pm 2\,|\mathbf{a}_{||}(t)|\,\dot{s}(t)\,\Delta t\,, \tag{22}$$

Este último cálculo nos ha enseñado algo muy interesante, los cambios en la magnitud de la velocidad, esto es, los cambios en la rapidez provienen de la componente de la aceleración paralela a la velocidad, más aún, si recordamos que tanto la rapidez como $|\mathbf{a}_{||}(t)|$ son cantidades positivas y que en la fórmula 22 el signo + corresponde al caso en que la velocidad es paralela a $\mathbf{a}_\perp$, mientras que el signo $-$ corresponde al caso contrario, veremos que en el primer caso la rapidez aumenta, mientras que en el segundo disminuye. En resumen:

Teorema 1 *En un movimiento con aceleración, los cambios instantáneos de dirección de la velocidad se deben a la componente de las aceleración ortogonal a aquella ($\mathbf{a}_\perp(t)$), mientras que los cambios de la rapidez deben asociarse con la componente de la aceleración paralela a la velocidad ($\mathbf{a}_{||}(t)$), más aún, si $\mathbf{a}_{||}(t)$ es paralela a la velocidad la rapidez sufre un aumento instantáneo, mientras que si $\mathbf{a}_{||}(t)$ y $\mathbf{v}(t)$ son antiparalelas, la rapidez instantánea disminuye*

Al haber introducido la aceleración, y estudiado su significado, hemos completado el conjunto de definiciones que se requieren para estudiar la cinemática del punto material en el marco de la mecánica de Newton.

Ejemplo 8 *Vamos a estudiar un problema que resume todos los conseptos que hemos estudiado hasta acá. Considere una partícula que se mueve en el plano cartesiano* XY *de tal suerte que las componentes de su vector de posición son* $x(t) = R\, sen(\omega_0 t)$, $y(t) = R_0\,(1 - cos(\omega_0 t))$, *donde* R_0 *y* ω_0 *son constantes cuyas dimensiones son de longitud y tiempo*$^{-1}$ *respectivamente..*

1. *Encuentre el vector de posición de la partícula.*

2. *¿Cuál es la distancia que recorre la partícula entre* 0 *y* T*?.*

3. *¿Qué ángulo forman la velocidad y la aceleración de la partícula?*

4. *¿Cuál es la trayectoria de la partícula?*

La respuesta a la primera cuestión es sumamente sencilla, llamando $\hat{\mathbf{e}}_x$ *y* $\hat{\mathbf{e}}_y$ *a los versores paralelos a los ejes coordenados podemos poner directamente:*

$$\mathbf{r} = R\, sen(\omega_0 t)\,\hat{\mathbf{e}}_x + R\,\left(1 - cos(\omega_0 t)\right)\,\hat{\mathbf{e}}_y\,. \tag{23}$$

La segunda cuestión es más delicada ya que está relacionada con la longitud de arco. Para poder responderla basta con notar que en un intervalo de tiempo infinitesimal (dt) a partir de un instante inicial (t) el desplazamiento de la partícula tiene que ser

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + dt) - \mathbf{r}(t)\,, \tag{24}$$

y que la longitud de este vector infinitesimal $|d\mathbf{r}| \equiv ds$ *es la distancia que la partícula recorre en el intervalo dt. Ahora bién, y acá se espera que usted domine bien las ideas del cálculo diferencial:*

$$\mathbf{r}(t + dt) - \mathbf{r}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)dt = \mathbf{v}\,dt\,, \tag{25}$$

por otra parte, nuestros conocimientos de la "tecnología" de los vectores indican que:

$$|d\mathbf{r}| = \sqrt{d\mathbf{r}.d\mathbf{r}} = \sqrt{dt^2\mathbf{v}.\mathbf{v}}\,, \tag{26}$$

luego (y acá estamos escribiendo algo general para movimientos en un plano):

$$ds = dt\,\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,. \tag{27}$$

La velocidad se calcula muy facilmente a partir de la fórmula 23 resultando

$$\mathbf{v} = R\,\omega_0\,[cos(\omega_0 t)\,\hat{\mathbf{e}}_x + sen(\omega_0 t)\,\hat{\mathbf{e}}_y]\ , \tag{28}$$

que es un vector de magnitud constante e igual a $|\mathbf{v}| = R\,\omega_0$ *de manera que, en definitiva, la longitud de arco en el intervalo de tiempo que nos interesa es:*

$$s = R\,\omega_0 \int_0^T dt = R\omega_0 T\,. \tag{29}$$

La pregunta en relación al ángulo que forman la velocidad y la aceleración, se puede responder sin cálculo alguno, en efecto, la aceleración es la derivada de la velocidad y como la magnitud de esta última es constante, la aceleración tiene que ser ortogonal a $\mathbf{v}$*. Por supuesto esto se puede verificar derivando* $\mathbf{v}$ *y calculando el producto escalar* $\mathbf{v}.\dot{\mathbf{v}}$

La trayectoría se dejó como última pregunta para que los resultados se pudieran interpretar de manera directa. Sabemos que la ley horaria del movimiento se puede escribir en componentes en la forma

$$x(t) = R\,sen(\omega_0 t) \tag{30}$$

$$y(t) = R\,(1 - cos(\omega_0 t))\ , \tag{31}$$

ó

$$
\begin{aligned}
x(t) &= R\,sen(\omega_0 t) &(32)\\
y(t) - R &= -R\,cos(\omega_0 t) &(33)
\end{aligned}
$$

elevando al cuadrado ambas ecuaciones y sumándolas se obtiene

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2\,, \tag{34}$$

de manera que la trayectoria del movimiento es un círculo de radio R con centro en el punto $(0, R)$.

5. El problema de valores iniciales I: Movimiento a lo largo de una recta.

Esta sección está puesta acá con la única motivación de hacerle ver la necesidad del uso de la integración como herramienta básica de este curso, en verdad, usted podría saltar esta sección, concentrarse en la siguiente e imponer algunas condiciones particulares muy simples para obtener los resultados de esta sección. De hecho, aún no estoy seguro de que valga la pena tener esta sección y quizá en el futuro me convenza de que es mejor quitarla del todo.

Consideremos un movimiento que se lleva a cabo a lo largo de una recta. Si escojemos uno de los vectores de la base ortonormal ($\hat{\mathbf{e}}_x$) de manera que sea paralelo a la recta (llamémosla la recta de coordenadas x) y escojemos el origen de coordenadas para que coincida con $x = 0$ el vector de posición de la partícula será

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\hat{\mathbf{e}}_x\,, \tag{35}$$

y evidentemente la velocidad y la aceleración de la partícula serán

$$\mathbf{v}(t) = \dot{x}(t)\,\hat{\mathbf{e}}_x \qquad \text{y} \quad \mathbf{a}(t) = \ddot{x}(t)\,\hat{\mathbf{e}}_x\,. \tag{36}$$

Supongamos que estamos viajando en un auto a lo largo de una carretera muy recta y larga de manera que podamos imaginar que el auto en que viajamos coincide con la partícula de que estamos hablando, supongamos además que el auto está equipado con un sistema que permite grabar un archivo con los siguientes datos: la hora y el valor $\dot{x}$ a esa hora, el signo de $\dot{x}$ será positivo si el auto está viajando en el sentido paralelo a $\hat{bf e}_x$ y negativo en caso contrario.

Consideremos ahora el siguiente problema: si se conoce la posición del auto a alguna hora que denominaremos t_0 ‘?cuál será la posición del auto a otra hora, digamos, t?.

Antes de continuar debo comentar para ser honesto, que el problema en la forma que lo estoy planteando es totalmente académico ya que un auto equipado con un dispositivo GPS permite grabar un archivo con la posición y velocidad instantánea (si, el vector) del auto a ciertos intervalos de tiempo según lo especifique el usuario. Sigamos con nuestro problema.

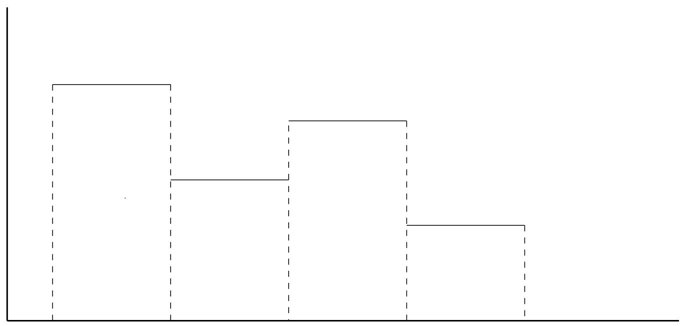

Figura 7: Componente de la velocidad de un movil que se mueve a lo largo de una recta con rapidez constante en intervalos de tiempo iguales.

Para resolverlo dibujemos un gráfico de la velocidad contra el tiempo y supongamos por un momento que la velocidad del auto entre cada dos mediciones es constante. En ese caso es facil ver que, si componente de la posición inicial es $x(t_0) = x_0$, la componente de la posición final será

$$x(t) = x_0 + v(t_1)\Delta t + v(t_2)\Delta t + ... + v(t_N)\Delta t_N\,. \tag{37}$$

ahora bien, sabemos que la velocidad del auto no tiene porque ser constante, de tal manera que lo que estamos haciendo es falaz. Sin embargo, en cada intervalo de tiempo existe un objeto que si tiene un sentido físico muy adecuado para el calculito que estamos haciendo, la velocidad media en el intervalo. Como el movimiento es a lo largo de una recta, la velocidad media tiene por magnitud la rapidez media y o de la cantidad $\langle v(t_i)\rangle$ en el i-ésimo intervalo temporal refleja muy bien el sentido del movimiento del auto en ese intervalo, en definitiva, una forma adecuada de dar una respuesta aproximada a nuestra pregunta académica es

$$x(t) = x(0) + \sum_{i=1}^{N} \langle v(t_i)\rangle\,\Delta t\,. \tag{38}$$

Si reducimos el tamaño de los intervalos Δt a expensas de tener muchísimos más datos, los valores de $\langle v(t_i)\rangle$ serán cada vez más parecidos a los valores instantáneos $v(t_i)$y al final pondremos

$$x(t) = x(0) + \lim_{N\to\infty, \Delta t\to 0} \sum_{i=1}^{N} v(t_i)\,\Delta t\,, \tag{39}$$

ó

$$x(t) - x(0) = \lim_{N\to\infty, \Delta t\to 0} \sum_{i=1}^{N} v(t_i)\,\Delta t\,. \tag{40}$$

Pero sabemos muy bien que si el límite de la derecha existe, su valor es la integral de Rieman de la componente de la velocidad instantánea$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{a}(t)\ v(t)$ de manera que en ese caso

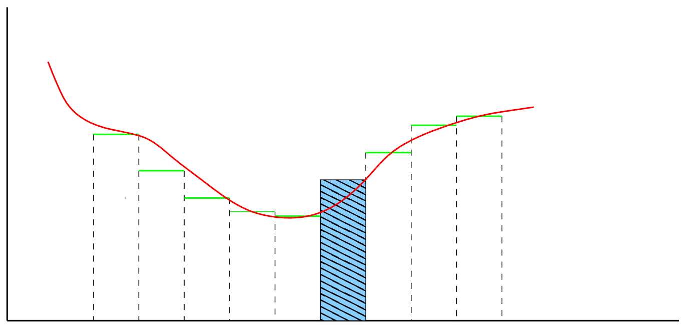

Figura 8: Componente de la velociad de un movil en D=1 aproximada por velocidades medias en subintervalos. Cada sumando $\langle v(t_i)\rangle\,\Delta t$ de la fórmula 38 representa el área de uno de los rectangulitos

escribiremos

$$x(t) - x(0) = \int_{t_0}^{t} ds\, v(s)\,. \tag{41}$$

Ahora bien, ya que $v(t) = \dot{x}$ esta última fórmula no es otra cosa que el teorema fundamental del cálculo infinitesimal.

En fin, la respuesta matemáticamente exacta a nuestra pregunta es la siguiente: la posición final del auto en el instante t está dada por

$$\mathbf{r}(t) = \left[x(0) + \int_{t_0}^{t} ds\, v(s)\right]\,\hat{\mathbf{e}}_x\,. \tag{42}$$

Escribimos la respuesta en esta forma en lugar de usar la fórmula (41) para evitar la tentación de caer en el error de confundir las palabras velocidad, componente de la velocidad y rapidez, confusión que en un movimiento a lo largo de una recta podría no ser demasiado grave, pero que en el caso general es absolutamente inadmisible.

Por cierto que, en la fórmula 42, la integral representa el área algebráica bajo la curva de componente de la velocidad vs tiempo.

6. El problema de valores iniciales: movimiento general del punto

Pensemos en la siguiente generalización del problema que estudiamos en la sección anterior:

Dadas la posición y velocidad de una partícula en un cierto instante t_0 encuentre la posición de la partícula para cualquier otro instante t.

Este es el problema fundamental de la cinemática y es conocido como problema de valores iniciales, en general este es un problema matemático extremadamente dificil de resolver en forma analítica, sin embargo, en cierto caso especial la solución del problema es sencilla. Ese es el problema cuya solución estudiaremos a continuación.

Supongamos que conocemos la aceleración de la partícula y que la podemos escribir explícitamente como un vector que depende del tiempo[7], es decir, supongamos que conocemos una fórmula para $\mathbf{a}(t)$. Sabemos que la velocidad y la aceleración están relacionadas por $\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{a}(t)$ y por lo tanto una generalización obvia del teorema fundamental del cálculo infinitesimal implica

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} ds\, \mathbf{a}(s)\,. \tag{43}$$

Si podemos resolver esta integral (es decir, las tres integrales que corresponden a las tres componentes de la aceleración) habremos calculado la velocidad $\mathbf{v}(t)$. La velocidad está relacionada a su vez con el vector de posición según $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}(t)$ así que podemos concluir que

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} ds\, \mathbf{v}(s)\,. \tag{44}$$

y hemos terminado de resolver nuestro problema.

[7] hay casos en que esto no es posible a priori

Ejemplo 9 *El movimiento con aceleración constante.*

El movimiento con aceleración constante es un caso especial muy sencillo del problema que acabamos de discutir, antes de entrar en materia notemos que aún cuando a usted le mostraron varios problemas distintos de cinemática durante sus estudios de secundaria (moviemto con velocidad constante, movimiento uniformemente acelerado, ..., que se yo!), en verdad solo estudió el problema con aceleración constante considerando varios casos particulares como cosas distintas, lo que en mi opinión es una gran tonteria que le llenó la cabeza de errores de concepto.

Ahora si, volvamos a la física, consideremos una partícula cuya aceleración con respecto a algún observador es constante, para fijar la notación pondremos $\mathbf{a} = \mathbf{a}_c$*=vector constante y queremos encontrar el vector de posición* $\mathbf{r}(t)$ *para instantes posteriores a un cierto instante iniciial* t_0.

En estas condiciones estamos justo en un caso especial del problema de valores iniciales que acabamos de discutir. Como ya aprendimos, el primer paso en el proceso de hallar la ley horaria del movimiento ($\mathbf{r}(t)$*) consiste en integrar la aceleración para obtener la velocidad, en vista de que el vector de aceleración es independiente del tiempo podemos extraerlo de la integral para quedar con*

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^{t} ds\, \mathbf{a}(s) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}_c \int_{t_0}^{t} ds = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}_c\,(t - t_0)\ . \tag{45}$$

Habiendo encontrado la velocidad como función del tiempo solo nos resta integrar una vez más para obtener

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} ds\ \left[\mathbf{v}_0 + \mathbf{a}_c\,(s - t_0)\right]\ , \tag{46}$$

notando que la integral de una suma es una suma de integrales puedo reescribir esta expresión *en la forma*

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{v}_0 \int_{t_0}^{t} ds + \mathbf{a}_c \int_{t_0}^{t} ds\ (s - t_0)\ , \tag{47}$$

y ahora podemos integrar sin dificultad alguna para alcanzar el resultado final

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{v}_0\,(t - t_0) + \frac{\mathbf{a}_c}{2}\,(t - t_0)^2\ . \tag{48}$$

Nuestro resultado está expresado en forma vectorial pura sin recurrir a una base. Es interesante introducir un triedro dextrogiro para comparar el aspecto de lo que acabamos de calcular con las cosas que usted estudió hace algún tiempo.

Escojamos la base de tal forma que $\hat{\mathbf{e}}_1$ *y* $\hat{\mathbf{e}}_2$ *sean coplanares con la aceleración* $\mathbf{a}_c$ *y la velocidad inicial* $\mathbf{v}_0$*,* $\hat{\mathbf{e}}_3$ *tiene que ser perpendicular al plano que forman* $\hat{\mathbf{e}}_1$ *y* $\hat{\mathbf{e}}_2$ *y su orientación debe sers adecuada para satisfacer la regla de la mano derecha. Escojamos ademas* $\hat{\mathbf{e}}_2$ *como paralelo a la aceleración, esto nos permite expresar esta última como* $\mathbf{a}_c = a_c\,\hat{\mathbf{e}}_2$ *y nos obliga a poner*

$$\mathbf{v}_0 = v_{01}\,\hat{\mathbf{e}}_1 + v_{02}\,\hat{\mathbf{e}}_2\,, \quad y \tag{49}$$

$$\mathbf{r}_0 = r_{01}\,\hat{\mathbf{e}}_1 + r_{02}\,\hat{\mathbf{e}}_2 + r_{03}\,\hat{\mathbf{e}}_3\,. \tag{50}$$

Al sustituir en la fórmula (48) queda

$$\mathbf{r}(t) = [r_{01} + v_{01}(t - t_0)]\,\hat{\mathbf{e}}_1 + \tag{51}$$

$$+ \left[r_{02} + v_{02}(t - t_0) + \frac{a_c}{2}(t - t_0)^2\right]\hat{\mathbf{e}}_2 + r_{03}\,\hat{\mathbf{e}}_3\,. \tag{52}$$

Para que nuestro resultado se compare aún mejor con lo que usted estudió en secundaria ó lo que puede encontrar en los libros de texto de física para ciencias e ingeniería introducimos un *cambio de notación. Llamemos* $\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\imath}$, $\hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\jmath}$ *y* $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{k}}$. *Adicionalmente notemos que siempre puedo escojer el origen de manera de poner* $r_{03} = 0$. *Además llamaremos* $r_{01} = x_0$, $r_{02} = y_0$, *etc. de manera de poder poner rfinalmente*

$$\mathbf{r}(t) \;=\; [x_0 + v_{0x}(t - t_0)]\,\hat{\imath} + \left[y_0 + v_{0y}(t - t_0) + \frac{a_c}{2}(t - t_0)^2\right]\hat{\jmath}\,, \tag{53}$$

y listo ya tenemos todo lo que habíamos estudiado en secundaria.

Los denominados movimientos uniformes son sencillamente movimientos en que la aceleración es nula (un caso especial de lo que acabamos de discutir).

El movimiento uniformemente acelerado de los libros elementales no es otra cosa que lo que ocurre si $x_0 = 0$, $v_{0x} = 0$ *y* a_c *tiene el mismo signo que* v_{0y}, *es decir, es un movimiento en que la velocidad inicial es paralela a la aceleración. En este caso, la velolcidad instantánea es* $\mathbf{v} = [v_{oy} + a_c(t - t_0)]\ \mathbf{e}_y$ *de manera que al crecer* $t - t_0$ *la magnitud de la componente de la velocidad a lo largo de la dirección del movimiento crece.*

El famoso movimiento uniformemente retardado también está descrito por nuestros resultados, es el movimiento que aparece cuando $x_0 = 0$, $v_{0x} = 0$ *y* a_c *tiene signo opuesto al de* v_{0y}, *o dicho en los términos propios, la velocidad inicial y la aceleración son paralelos. Durante un cierto período de tiempo*[8] *la magnitud de la velocidad disminuye hasta alcanzar el valor* 0 *por eso se habla de "frenado" (se quiere insistir en mezclar el castellano cotidiano con el lenguaje científico), para intervalos de tiempo mayores la rapidez crece sin cota (¿cual es la interpretación física de esto?)*

Ejemplo 10 *Consideremos la fórmula 22 que describe el cambio de rapidez en períodos de*

[8] para ser precisos durante un intervalo de tiempo $T = abs(v_{0y}/a)$

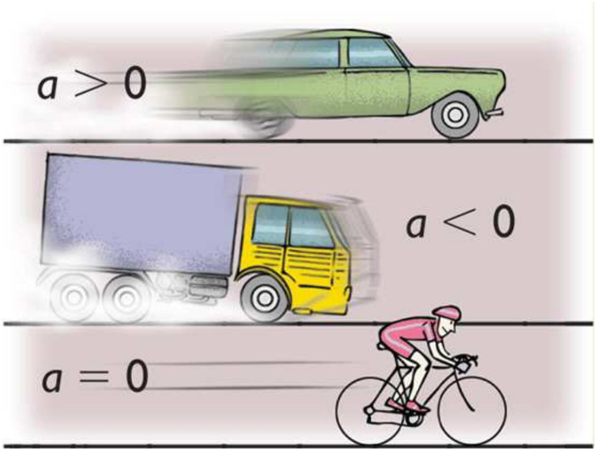

Figura 9: Estos diagramas muestran el efecto instantáneo de la aceleración en un movimiento rectilíneo, no se supone que la aceleración sea constante, el interés se centra en un intervalo muy corto (Δt) de tiempo, la componente de la velocidad inicial es positiva.

tiempo muy cortos (Δt) alrededor de un instante t:

$$|\mathbf{v}(t+\Delta t)|^2 = \mathbf{v}^2(t) \pm 2\,|\mathbf{a}_{||}(t)|\,\dot{s}(t)\,\Delta t\,, \tag{54}$$

cuando consideramos el movimiento a lo largo de una recta (digamos que $x(t)$ es la posición a lo largo de la recta) podemos poner

$$\dot{x}^2(t+\Delta t) = \dot{x}^2(t) + 2\,a(t)\,\dot{x}(t)\,\Delta t\,, \tag{55}$$

donde hemos cambiado el símbolo $\pm$ por un signo $+$ para dejar el signo implícito dentro del valor numérico de la aceleración. Al utilizar la fórmula en el contexto de la figura 9 vemos los efectos de cambio de rapidez asociados a los cambios de signo de la aceleración, si $a > 0$ la acdeleración es paralela a la velocidad inicial y la rapidez aumenta, en el caso $a < 0$ la velocidad inicial y la aceleración son antiparalelas y vemos que la rapidez disminuya, en el caso $a = 0$

la rapidez no cambia. Por cierto, que esto debería haber resultado ser evidente en vista del teorema 1

Ejemplo 11 *Consideremos otro ejemplo de movimiento a lo largo de una recta, en este caso queremos calcular la velocidad de un auto luego de* 5 *segundos de haber comenzado a variar su velocidad a partir de la componente de su aceleración a lo largo de la recta y de su velocidad inicial* $\mathbf{v}_0 = 10\, m/s\ \hat{\mathbf{e}}_1$. *Ya sabemos que el resultado luego de* t *segundos está dado por el teorema fundamental del cálculo como:*

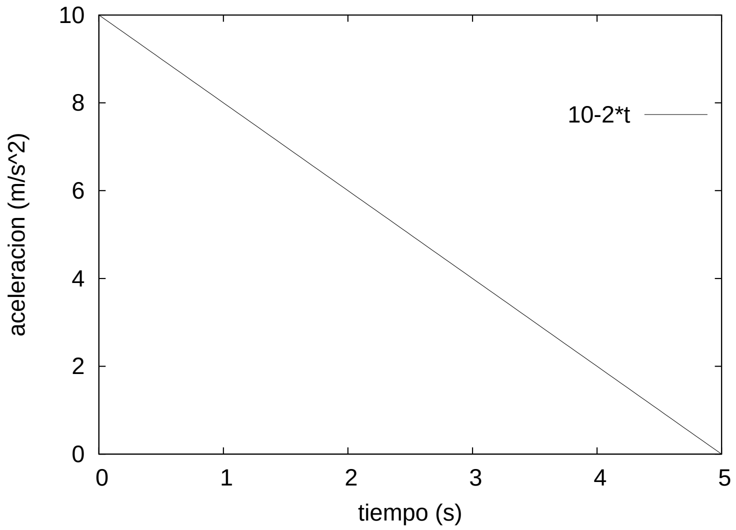

Figura 10: Este gráfico muestra un modelo muy simplificado de aceleración de un auto, los números no son totalmente descabellados, un auto de piques de alta competencia puede alcanzar una aceleración de hasta $3{,}3\, g$, un auto de carreras $F1$ puede llegar a $1g$ y un Dodge Viper 1997 puede alcanzar una aceleración máxima de $0{,}94\, g$.

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{e}_1 \int_{t_0}^{t} ds\, a(s) = \left[v_0 + \int_{t_0}^{t} ds\, a(s) \right]\ m/s\ \ \hat{\mathbf{e}}_1\,, \tag{56}$$

donde: $v_0 = 10\ m/s$.

Ahora bien, la fórmula 56 nos dice que si $v(t)$ *es la componente de la velocidad a lo largo de* $\hat{\mathbf{e}}_1$ *entonces:*

$$v(t) = [10 + A]\ m/s\ \ \hat{\mathbf{e}}_1\,, \tag{57}$$

donde A *es el área algebráica bajo la curva aceleración vs. tiempo entre* 0 *y* 5 *segundos. Por otra parte, es precisamente* $a(t)$ *lo que aparece en la figura 10 y allí resulta evidente que* $A = 10 \times 5/2 = 25\ m/s$ *de manera que la rapidez final del auto es de* $35\, m/s$ *ó en unidades más estándar cambió de* $36\, Km/h$ *a* $125\, Km/h$.

Lo interesante de este cálculito es que le muestra como uno puede se engañado muy facilmente por sus primeras impresiones y preconceptos. A primera vista, es claro que la aceleración del auto está disminuyendo y uno podría tener la tendencia a decirse a sí mismo: el auto está desacelerando, muy al contrario, a pesar de que la magnitud de la aceleración es cada vez más chica, durante todo el intervalo de interés los signos de las componentes de la velocidad y de la acelearación son iguales y por lo tanto la rapidez tiene que aumentar que fue el resultado que se obtuvo.

Ejemplo 12 *Esta sección nos ha preparado para enfrentar problemas bien interesantes, comencemos por uno en que, al principio, parecerá que las cosas van muy mal.*

Encuentre la velocidad $\mathbf{v}$ *de una partícula se mueve a lo largo de una recta y que la componente de su aceleración a lo largo de esa recta tiene la forma:*

$$\ddot{x} = -\gamma\, \dot{x}\,, \tag{58}$$

donde γ *es una constante cuyas dimensiones son de tiempo*$^{-1}$.

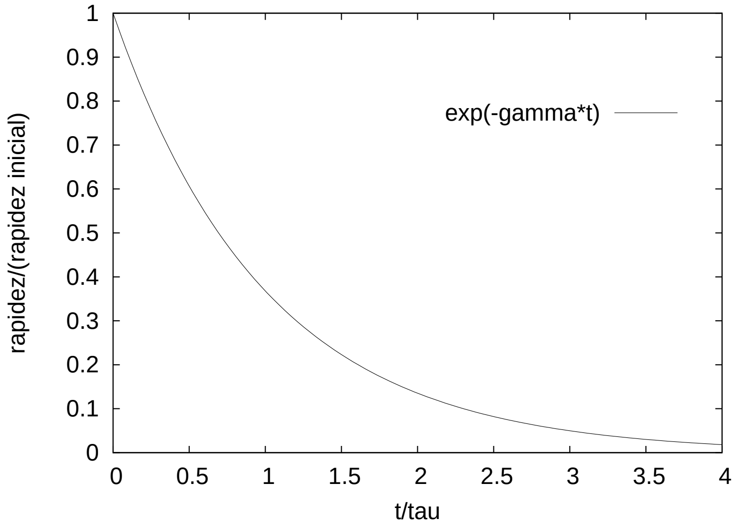

Figura 11: Velocidad en función del tiempo para una aceleración de la forma $-\gamma\dot{x}$, para fines de graficación se ha introducido: $\tau = \gamma^{-1}$. Nótese que la aceleración siempre se opone a la velocidad y que por lo tanto el movimiento es de frenado.

Solo estamos interesados en $v = \dot{x}$, así que comencemos por expresar la aceleración de la partícula como

$$\frac{dv}{dt} = -\gamma\, v\,, \tag{59}$$

y notemos que en este problema no podemos integrar directamente para encontrar la velocidad, en efecto, al integrar se obtiene la fórmula

$$v(t) = -\gamma \int_{v_0}^{v(t)} ds\, v(s)\,, \tag{60}$$

que contiene en su integrando la función incógnita: $v(t)$ que evidentemente desconocemos. ¿Qué ocurre?, ¿por qué no podemos utilizar lo que acabamos de discutir?, ¿todo lo que hicimos está mal?. La respuesta es simple, comenzamos esta sección comentando que en general *el problema de valores iniciales es un problema matemático interesante. Nuestra discusión continuó bajo una hipótesis muy particular, que la aceleración era una función explícita del tiempo. En el problema que estamos tratando en este ejemplo, la dependencia en t está implícita en la velocidad ($v(t)$ que desconocemos y queremos encontrar y por lo tanto estamos fuera de la hipótesis que utilizamos en el desarrollo de la sección.*

Veamos que se puede hacer. Para comenzar aprendamos algo de matemáticas[9]*, la ecuación 59 contiene a la incógnita y a su derivada, una ecuación de este tipo se denomina ecuación diferencial de primer orden, y por razones que se van a hacer claras en un momento se llama más específicamente: ecuación diferencial de primer orden separable.*

El apelativo de separable proviene de reescribir la ecuaión 59 en la forma

$$dt = -\frac{dv}{\gamma\, v}\,, \tag{61}$$

que integrando entre un instante inicial (digamos $t = 0$) y otro instante t en un miembro y utilizando las velocidades correspondientes en el otro queda como

$$\int_0^t d\xi = -\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{ds}{\gamma\, s}\,, \tag{62}$$

de manera que la ecuación se llama separable porque las variables se pueden colocar sin mezclarse a ambos lados de la igualdad.

Si suponemos que $v(0) = v_0$ el resultado de la integración es

$$-\gamma\, t = \ln\left[\frac{v(t)}{v_0}\right]\,, \tag{63}$$

[9] por cierto, lo que aprenda acá le será util para estudiar otros problemas físicos: circuitos RC, crecimiento y/o decrecimiento de poblaciones y muchos otros

exponenciando y despejando $v(t)$ se obtiene

$$v(t) = v_0 \, e^{-\gamma \, t} \, . \tag{64}$$

Es facil notar que este es un movimiento de frenado ya que la magnitud de la velocida se reduce (eso debió haber sido claro desde el principio ya que la velocidad y la aceleración eran de signo contrario). De hecho, como

$$\lim_{t \to 0} e^{-\gamma t} = 0 \, , \tag{65}$$

la partícula se detiene totalmente luego de un tiempo largo (en verdad cuando $t \approx 4/\gamma$ el valor de la rapidez ya solo es 0,02 veces el valor inicial, o dicho en otros términos, ha caído al 2 % de su valor inicial).

7. Movimiento bajo la acción de la gravedad

Cuando nos encontramos cerca de la superficie terrestre esta parece ser un plano. En estas circunstancias, un objeto sobre el que no actúe nada más que la atracción gravitacional de la tierra (lo que le hace caer si se le suelta de un reposo inicial) queda sometido a una acelearción constante de magnitud g dirigida hacia el plano que constituye la superficie de la tierra. Si se escoje el vector $\hat{\jmath}$ de tal manera que su orientación sea vertial hacia arriba, la aceleración de gravedad será antiparalela a $\hat{\jmath}$. El problema que encontramos al utilizar la velocidad media es que no corresponde a la idea que estamos acostumbrados a utilizar todos los días, en castellano hablamos del *velocímetro* y de la *velocidad* del auto y los conceptualizamos en términos de que tan *rápido* se mueve nuestro auto. Si nuestro auto es capaz de alcanzar los 220 Km/h decimos que es muy rápido, ahora bien, ¿qué queremos decir con eso?.

Al sustituir $-g\hat{\jmath}$ como aceleración en la ley de movimiento que hemos encontrado para el movimiento con aceleración constante (ejemplo 9) resulta que

$$\mathbf{r}(t) \quad = \quad [x_0 + v_{0x}(t - t_0)]\,\hat{\mathbf{i}} + \left[y_0 + v_{0y}(t - t_0) - \frac{g}{2}(t - t_0)^2\right]\hat{\mathbf{j}} \tag{66}$$

Por supuesto que esta formulita solo es válida mientras el cuerpo se encuentre libre. Así por ejemplo, si el plano que constituye en suelo se encuentra en $y = 0$ la formulita no puede utilizarse para tiempos que produzcan una segunda componente del vector de posición con valores menores a 0.

Hay un montón de problemitas asociados a la ley de movimiento (66) cuyo interés es más histórico y relacionado con la balística que otra cosa. Para atacar estos problemas es menester comentar que la magnitud de la velocidad inicial del movimiento a veces se denomina “velocidad del proyectil en la boca de fuego”, al ángulo que la velocidad inicial forma con el plano horizontal se le denomina “ángulo de elevación”, finalmente si se hace un lanzamiento la distancia horizontal recorrida se denomina “alcance”[10]

Ejemplo 13 *Ahora vamos estudiar un problema algo más interesante. Consideremos una partícula que cae bajo la acción de la gravedad y tomemos en cuenta el rozamiento con el aire modelándolo su efecto en términos de una aceleración proporcional a la rapidez (vea el ejemplo 12, estaremos interesados pues, en calcular la velocidad* $\mathbf{v}$ *de una partícula cuya aceleración (en el sistema de coordenadas usual) es:*

$$\mathbf{a} = (-g\alpha - \gamma\,\dot{y})\,\hat{\mathbf{e}}_y\,, \tag{67}$$

[10]con respecto al alcance hay que tener cuidado puesto que a veces el concepto se generaliza un poco más

donde $g = 9{,}8\, m/s^2$ *y* γ *es una constante positiva.*

Como en el ejemplo 12 solo estamos interesados en la componente de la velocidad ($v = \dot{y}$)*. Una vez más tenemos el problema de que el tiempo aparece implícitamente en la variable que queremos encontrar, de todas formas la ecuación*

$$\ddot{y} = -g - \gamma\, \dot{y}\,, \tag{68}$$

es una ecuación diferencial de primer orden separable y podemos utilizar el mismo truco de antes para poner

$$-dt = \frac{dv}{g + \gamma\, v}\,, \tag{69}$$

que integrando entre un instante inicial (digamos $t = 0$*) y otro instante* t *en el lado izquierdo de la ecuación y utilizando las velocidades correspondientes en el otro queda como*

$$-\int_0^t d\xi = \int_{v(0)}^{v(t)} \frac{ds}{g + \gamma\, s}\,. \tag{70}$$

Nos interesa el caso en que la partícula se deja caer (esto es $v(0) = 0$*) lo que resulta en*

$$-\gamma\, t = \ln\left[\frac{g + \gamma\, v(t)}{g}\right]\,, \tag{71}$$

exponenciando y despejando $v(t)$ *se obtiene*

$$v(t) = -\frac{g}{\gamma}\left[1 - exp(-\gamma\, t)\right] \tag{72}$$

en este ejemplo hay dos límites sumamente interesantes, el primero es el límite de tiempos muy largos ($\gamma t >> 1$*, es decir,* $t >> \gamma^{-1}$*) para tales tiempos la exponencial se hace despreciable y la rapidez alcanza un valor máximo denominado velocidad terminal*

$$\lim_{t\to\infty} |v(t)| = \frac{g}{\gamma}\,, \tag{73}$$

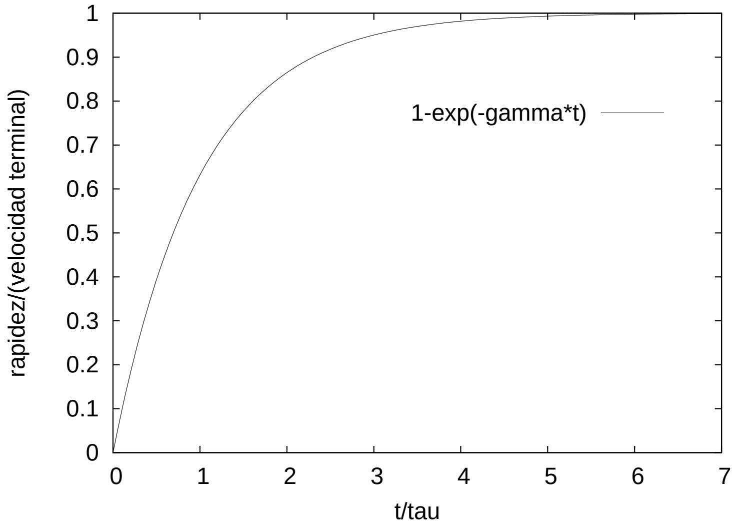

Figura 12: Rapidez en función del tiempo para una aceleración de la forma $-(-g - \gamma\dot{y})$ (caída vertical con frenado viscoso), nótese que la partícula acelera hasta alcanzar una rapidez máxima (la velocidad terminal) a la que el movimiento pasa a ser un movimiento con velocidad constante.

esto podría haberse previsto de alguna manera notando que en la ecuación $\ddot{y} = -g - \gamma\,\dot{y}$, *la aceleración se anula cuando* $\dot{y} = g/\gamma$.

El otro límite de interés ocurre para tiempos muy cortos (movimiento incipiente), es decir, cuando $\gamma\, t << 1$ *(ó* $t << \gamma^{-1}$, *en estas condicionesy recordando que*

$$exp(-\gamma\, t) = 1 - \gamma\, t + \frac{1}{2}[\gamma\, t]^2 - \frac{1}{3!}[\gamma\, t]^3 + -\frac{1}{4!}[\gamma\, t]^4 + \ldots \tag{74}$$

podemos usar la aproximación de primer grado

$$exp(-\gamma\, t) \approx 1 - \gamma\, t\,, \tag{75}$$

de manera que

$$|v(t)| = \frac{g}{\gamma}\,[1 - 1 + \gamma\, t] = g\, t\,, \tag{76}$$

es decir, que la partícula se comporta como si estuviera en caída libre.

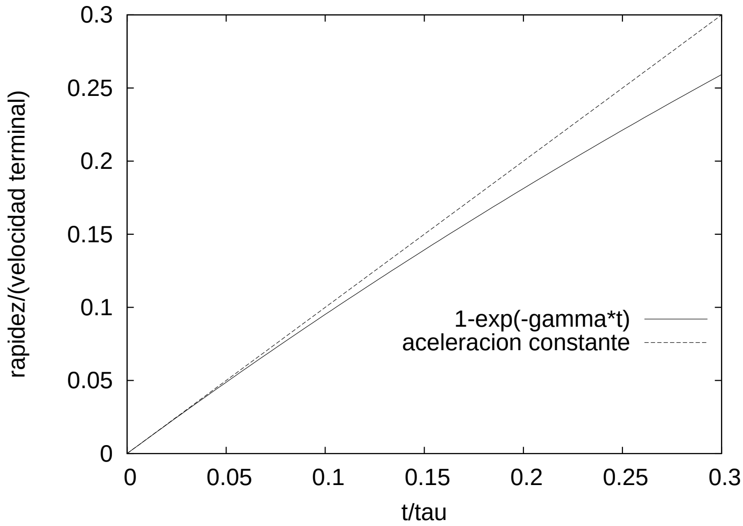

Figura 13: Comparación entre la caída libre y la caida con frenado viscoso para tiempos cortos.

8. Transformaciones de Galileo

Este tema se presenta normalmente como "movimiento relativo". Este es un nombre que no me gusta para nada ya que por definición todo movimiento es relativo (a un observador) además el título no deja claro de que se quiere hablar.

Lo que nos interesa son los cambios de observador. Solo consideraremos sistemas que no presenten rotación. Es decir, solo consideraremos los casos en que los observadores mantienen su orientación relativa.

Consideremos la siguiente notación: $\mathcal{O}$ $\mathcal{O}'$ son los dos observadores que queremos relacionar, $\mathbf{r}_{\mathcal{O}}$ la posición de la partícula descrita por $\mathcal{O}$ y claro, $\mathbf{r}_{\mathcal{O}'}$ es la posición de la misma partícula según $\mathcal{O}'$. Finalmente, $\mathbf{R}_{\mathcal{O}\mathcal{O}'}$ es el vector de posición del observador $\mathcal{O}'$ con respecto al observador $\mathcal{O}$. Un diagramita muy sencillo demuestra la siguiente igualdad

$$\mathbf{r}_{\mathcal{O}} = \mathbf{r}_{\mathcal{O}'} + \mathbf{R}_{\mathcal{O}\mathcal{O}'}\,, \tag{77}$$

de manera que, al tomar derivadas se obtiene

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}\,, \tag{78}$$

donde $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_{\mathcal{O}}$, $\mathbf{v}' = \mathbf{r}_{\mathcal{O}'}$ $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}_{\mathcal{O}\mathcal{O}'}$ es la velocidad de $\mathcal{O}'$ medida por $\mathcal{O}$.

La fórmula 78 denominada fórmula de adición de velocidades, muestra como cambian las velocidades cuando se miden desde diferentes sistemas de referencia.

Ejemplo 14 *La fórmula de adición de velocidades es algo muy sencillo, pero sus consecuencias pueden ser tragicómicas. Imagine que viaja a lo largo de una autopista relativamente rectilínea y que su velocímetro marca* $140\,Km/h$*, usted está jugueteando con una pelota de beisbol y por descuido se le escapa por la ventana justo antes de pasar al lado de un pequeño puesto ambulante de venta de fruta.*

La pelota es vista por dos observadores, el vendedor de frutas $\mathcal{O}$ *y usted* $\mathcal{O}'$*, su velocidad con respecto a* $\mathcal{O}'$ *es:* $\mathbf{V} = 90\ millas/h\ \hat{\mathbf{e}}$*, donde el versor* $\hat{\mathbf{e}}$ *apunta a lo largo de la autopista y en el sentido que apunta hacia el puesto de fruta. Por otra parte, para usted la velocidad con que se le escapó la pelota (*$\mathbf{v}'$*) es casi nula, de manera que:* $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} = \mathbf{V}$*. Dicho en palabrask, el vendedor ambulante ve que desde el carro han lanzado una tremenda recta de "noventa millas" que hace papilla -por no decir otra cosa- su mercancia.*

Se puede diferenciar la fórmula de adición de velocidades (78) una vez más para obtener una relación entre las aceleraciones, que en una notación que debería ser evidente es la siguiente

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{A}\,. \tag{79}$$

No nos vamos a detener mucho en el caso $\mathbf{A} \neq 0$. El caso $\mathbf{A} = 0$ es de mayor interés en este punto, cuando la aceleración relativa es nula podemos poner inmediatamente,

$$\mathbf{R}_{\mathcal{O}\mathcal{O}'} = \mathbf{V}(t - t_0) + \mathbf{R}_0\,, \tag{80}$$

donde $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_{\mathcal{O}\mathcal{O}'}(t = t_0)$ y así finalmente podemos expresar la siguiente relación entre los vectores de posición según los dos observadores

$$\mathbf{r}_{\mathcal{O}} = \mathbf{r}_{\mathcal{O}'} + \mathbf{V}(t - t_0) + \mathbf{R}_0\,. \tag{81}$$

Si usamos una base ortonormal dextrogira $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ escogida de tal suerte que $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{j}}$ y escogemos $t_0 = 0$ encontramos las siguientes fórmulas para el cambio de coordenadas

$$x' = x - Vt\,, \quad y' = y\,, \quad z' = z \tag{82}$$

que se conocen como transformaciones de Galileo.

8.1. Skistemas de referencia inerciales

Si usted viviera en un sitio con noches llenas de estrellas notaría que las posiciones de la mayor parte de estas mantienen posiciones relativas entre sí, esta observación no tiene nada de novedosa y ha formado parte de los conocimientos acumulados por muchas y diversas civilizaciones previas a la nuestra.

Los pocos objetos celestes que al ojo desnudo constituyen excepciones a la regla de posición estelar fija recibieron el nombre de estrellas viajeras (planetas), desde un punto de vista relativamente primitivo resulta natural escojer a las estrellas fijas como base para crear un sistema de referencia, afortunadamente esto solo es una ilusión debida a que nuestras vidas son cortas, las estrellas cambian sus posiciones relativas y por lo tanto no pueden constituir un sistema de referencia en reposo absoluto ($\mathcal{G}$) que sirva de base para -utilizando las técnicas de la sección anterior- construir otros sistemas de referencia ligados a $\mathcal{G}$ a través de transformaciones de Galileo.

De existir $\mathcal{G}$ todo par de referenciales en movimiento uniforme con respecto a $\mathcal{G}$ podrían relacionarse entre sí a través de transformaciones galileanas (demuestre esto). Tales sistemas se denominan inerciales, una de las fallas fundamentales de la mecánica de Newton es la necesidad de recurrir a los sistemas de referencia inerciales.

Hoy día sabemos perfectamente que la noción de un referencial inercial absoluto es algo que no tiene sentido, sin embargo, desde todo de punto de vista práctico para la ingeniería podemos suponer que un sistema de referencia fijo a la tierra es inercial, esta es la postura que -por ser este un curso de mecánica Newtoniana- nos vemos obligados a tomar en este curso.

Para entender el problema de la existencia de los sistemas inerciales podemos tomar un pusto de vista práctico, la única forma de saber si un sistema es o no inercial es preguntarse si está en movimiento uniforme con respecto a algun otro sistema del que se sabe que es inercial, ahora bien, de hacerse la pregunta y obtener una respuestaafirmativa resulta necesario averiguar si el nuevo sistema es inercial, para esto....ya sabe usted lo que va a pasar.

Por cierto, hoy día podemos saber si un sistema de referencia es localmente inercial, para ello es necesario observar el comportamiento de rayos de luz, pero esto amigos es material de cursos más avanzados.